Közgazdász Fórum
Forum on Economics and Business
19 (128), 55–86.
2016/3

Planning of optimal fuel supply of international transport activity

MIKLÓS GUBÁN – GYÖRGY KOVÁCS

During long international transport loops petrol station selection and quantity of refilled fuel is not defined by a central decision making process at the forwarding companies, but it depends on the individual decision of the camion driver. Therefore, the total cost of the burned fuel is not optimal. The main goal of this study was to elaborate a precise and reliable mathematical model for the determination of optimal fuel refill points and the amount of fuel during the execution of international transportation tasks. The elaborated model is a mixed-integer nonlinear programming model, which can be used for the optimization. The model and the method are presented through a simple case study. By the application of the proposed method the total cost of a transport trip can be minimized.

Keywords: road transport, optimal fuel supply, cost reduction, optimization, mixed-integer nonlinear programming.

JEL codes: L91, R42.

Kiadó: Romániai Magyar Közgazdász Társaság és a Babeș–Bolyai Tudományegyetem Közgazdaság- és Gazdálkodástudományi Karának Magyar Intézete
ISSN: 1582-1986 www.econ.ubbcluj.ro/kozgazdaszforum

Nemzetközi közúti áruszállító járatok optimális üzemanyag-ellátásának tervezése

GUBÁN MIKLÓS[1] – KOVÁCS GYÖRGY[2]

A legtöbb áruszállító vállalat nemzetközi körjáratai során a tankolási helyek megválasztása és a tankolt üzemanyag mennyiségének meghatározása nem központilag irányított, hanem a járművezető egyéni döntésén alapul, így a járatok teljesítéséhez felhasznált üzemanyag költsége nem optimális. A publikáció célja egy pontos és megbízható matematikai modell és módszer kidolgozása az egyes áruszállítási feladatok teljesítéséhez szükséges optimális üzemanyag-felvételi helyek és mennyiségek meghatározására. A modell egy vegyes egészértékű nem lineáris programozási modell, amely optimalizáló eljárásokkal kezelhető. A modellt és a hozzá kapcsolódó feladatot egy egyszerű példán keresztül mutatjuk be. A kidolgozott modell és a megadott eljárás egy döntéstámogató szoftver alapját képezi, amely segítségével az egyes áruszállítási szakaszok gazdaságos teljesítéséhez szükséges információk előállíthatók, illetve a járművezetőkhöz eljuttathatók.

Kulcsszavak: közúti szállítás, optimális üzemanyag-ellátás, költségcsökkentés, optimalizáció, nem lineáris programozás.

JEL kód: L91, R42.

Bevezetés

A termeléshez és a szolgáltatásokhoz kapcsolódó szállítási tevékenység intenzitása folyamatosan növekszik, a gazdasági teljesítmények növekedésének, az egyre nagyobb méreteket öltő ellátási láncoknak köszönhetően.

Európában a közúti áruszállítás részaránya 78%-a a teljes áruszállítási volumennek, a fennmaradó 22% a vasúti (7%), a folyami vízi (3%),

---

[1] A cikk az Európai Unió Horizon 2020 kutatási és innovációs program 691.942 számú támogatási megállapodás alapján támogatásban részesült kutatási projekt eredményeit mutatja be.

[2] PhD, főiskolai tanár, Budapesti Gazdasági Egyetem, e-mail: guban.miklos@uni-bge.hu.

[3] PdD, egyetemi docens, Miskolci Egyetem, e-mail: altkovac@uni-miskolc.hu.

a tengeri (8%), a csővezetékes (4%) szállítási alágazatok között oszlik meg, míg a légi áruszállítás szinte elhanyagolható a maga 8 millió tonnás éves szállítási teljesítményével (Fraunhofer 2015). A szállítási teljesítményeket figyelembe véve elmondható, hogy a közúti szállítás intenzitása mind Európában, mind Magyarországon folyamatosan növekszik (Oláh et al. 2015).

A közúti szállítási mód elsősorban helyi vagy regionális viszonylatban gazdaságos, de számos előnye miatt távolsági forgalomban is alkalmazzák. Ez a magas részarány a többi szállítási módhoz viszonyított legsűrűbb vonalhálózatának, valamint a rövid eljutási időnek, a fuvaroztatók igényeihez való nagymértékű alkalmazkodóképességének és a szállítás során fellépő kis áru-igénybevételeknek köszönhető.

A nemzetközi áruszállító járatok kihasználtságának javítása, valamint a káros anyag kibocsátásának csökkentése a következő módokon lehetséges (Kovács 2011):

- a járműflotta modernizálása, alacsonyabb fogyasztású, kisebb károsanyag-kibocsátású motorok alkalmazása,
- a járművezetők vezetési technikájának javítása,
- multimodális szállítási módok alkalmazása, melynek során a szállítási láncban a közúti, vasúti és vízi szállítási módok is alkalmazásra kerülnek,
- a szállítási feladat végrehajtásának optimalizálása:
  – több szállítási feladat egy körjáratba való integrálása,
  – az üresjáratok kiküszöbölése,
  – a járműkapacitás kihasználtságának maximálása,
  – az optimális szállítási útvonal kiválasztása,
  – az ideális tankolási helyeken a megfelelő mennyiségű üzemanyag felvétele.

A tanulmányban a fent hivatkozott felsorolásból a legutolsó költségcsökkentési lehetőségre kidolgozott matematikai módszert ismertetjük.

Az áruszállító vállalatok esetében a nemzetközi körjáratok során a tankolási helyek megválasztása és a tankolt üzemanyag mennyiségének meghatározása nem központilag irányított, hanem a járművezető egyéni döntésén alapul, így a járatok teljesítéséhez felhasznált üzemanyag költsége nem optimális.

A kutatás célja a hosszú nemzetközi áruszállító körjáratok teljes költségének csökkentése azáltal, hogy a járművezető az ideális üzemanyagtöltő állomáson a megfelelő mennyiségű üzemanyagot tankolja. A cikkben ezen döntés támogatásához szükséges elméleti módszert ismertetjük.

Szakirodalmi áttekintés

A gyorsan változó piaci környezetnek és a globális versenynek köszönhetően az ellátási láncok egyre komplexebb hálózatokká válnak. Az egyes láncok versenyképessége a partnerek kompetenciáinak minél jobb kihasználásából és szinergiájából adódik. A globális piacon azonban az ellátási láncok is versenyeznek egymással a vevők igényeinek minél magasabb színvonalú kielégítése érdekében. A vevők a késztermékek megvásárlásával egyben a terméket előállító ellátási láncok közül is választanak, számos szempont alapján. A legfőbb döntési szempont a termék költsége, átfutási ideje, minősége, testreszabhatósága, valamint a termékhez kapcsolódó szolgáltatások színvonala.

Az ellátási láncok típusainak, jellemzőinek, működési stratégiáinak bemutatásával és elemzésével, az ellátásilánc-menedzsmenttel, valamint a hálózatok optimálásával sok szerző foglalkozik (Stevens 1989; Vonderembse 2006; Liu 2013).

Sok esetben a teljes ellátási lánc költségének akár 30%-a az áruszállításból származik (Kovács 2016), ezért valamennyi termelő-, szállítmányozó- és fuvarozóvállalat nagy hangsúlyt fektet a szállítási tevékenység optimálására.

A szakirodalom részletesen feltárja az általános logisztikai költségeket (Ross 2015; Rushton et al. 2010), és szintén nagyszámú publikáció ismerteti az áruszállítási költség költségkomponenseit (Birge et al. 2007; Bokor 2011; Anbuudayasankar et al. 2014).

A közúti áruszállítási tevékenység szervezésének fő célja az egy szállítási egységre eső fajlagos szállítási költség, valamint a szállítási idő minimálása (Caramia et al. 2008; Birge et al. 2007; Ehmke 2012).

Az áruszállítási rendszerek kialakítási módjának (árufeladási és -leadási helyek közötti útvonal vagy hálózat kialakítása) három alapvető struktúrája lehet, a vonal, a csillag és a körjárat típusú, illetve ezek kombinációi (Gudheus et al. 2009).

A nemzetközi áruszállítás jellegzetessége, hogy – az üresjáratok minimalizálása érdekében – többségében körjáratokból áll. Az áruszállító járatok szervezésének fő célja a gazdaságosság, vagyis az egységnyi árumennyiségre eső szállítási költség minimalizálása.

A rendelkezésre álló szakirodalom főként a szállítási körjáratok és hálózatok optimalizálására vonatkozik, melyek elsősorban az optimális útvonal kialakítását taglalják (Ehmke 2012; Birge et al. Linetsky 2007; Anbuudayasankar et al. 2014; Caramia et al. 2008), emellett néhány publikáció a szállítás üzemanyagköltségét – mint statikus adatot – is figyelembe veszi az optimalizálás során (Zhang et al. 2015; Zofio 2014).

Azonban a feltárt és fent hivatkozott szakirodalomban nem lelhető fel ezen publikáció azon alapgondolata, miszerint az üzemanyagköltség nagysága az egyes – különböző egységárú – kutak közül az optimális kiválasztásával jelentős mértékben csökkenthető. Tehát az üzemanyagköltség alapvetően egy dinamikusan változó adat minden egyes szállítási út során, mely a teljes ellátási lánc költségét is jelentősen csökkentheti, így a termékek és az ellátási lánc szereplőinek versenyképességét is eredményezheti. Megítélésünk szerint e tekintetben a kutatás újszerű.

A kutatás módszertana

A szakirodalom áttanulmányozása mellett a szerzőknek az elmúlt 15 évben lehetőségük nyílt számos fuvarozó- és szállítmányozóvállalatnak végzett kutatás-fejlesztési projektben részt venni, melynek köszönhetően jelentős gyakorlati tapasztalatot szereztek a közúti áruszállítás területén. Ezen gyakorlati tapasztalat, valamint a szállítóvállalatok képviselőivel való tapasztalatcsere vezette a szerzőket a bemutatott gyakorlati üzemanyag-tankolási probléma megoldására szolgáló matematikai modell és módszer kidolgozására.

A vállalatokkal való együttműködés során azt tapasztaltuk, hogy a körjárat teljesítése során sok esetben nem az ideális helyen történik az üzemanyag-tankolás, illetve nem a megfelelő mennyiségű üzemanyag felvétele történik meg, sőt az is előfordulhat, hogy a sofőr fölöslegesen tankol. Ezen rossz döntések eredménye, hogy a járatok teljesítéséhez felhasznált üzemanyag költsége nem optimális.

Ez a belföldi szállítási feladatok esetében is igaz, azonban a nemzetközi távolsági forgalomban van igazán nagy jelentősége, ahol jelentős üzemanyag-felhasználás történik. Ezen esetekben az üzemanyag felvételére számos üzemanyagtöltő-állomás biztosít lehetőséget, azonban az egyes kutak között literenként akár 40-50 forintos üzemanyagár-különbség is lehet, ami például egy 500 literes tankolás esetén 25 000 forint többletköltséget jelenthet.

Az is gyakori probléma, hogy a járművezető pl. a körjárat befejezésekor, a telephelyre való úton indokolatlanul vagy fölöslegesen nagy mennyiségű üzemanyagot tankol esetlegesen egy drága helyen. Ez azért jelentős, mivel a legtöbb nagy fuvarozócég járműveinek a saját telephelyén is van lehetőségük tankolni, ráadásul a legkedvezőbb árú üzemanyagot.

Ezen fenti példák is indokolják a szerzők azon célkitűzését, hogy a fuvarozóvállalatok számára nélkülözhetetlen egy – a szállítási költségek csökkentését eredményező – üzemanyag-optimálási módszer kidolgozása. A publikáció célja tehát egy olyan matematikai modell és az erre alapuló módszer kidolgozása, melyekkel a veszteségek kiküszöbölhetővé válnak és a szállítási tevékenység összköltsége csökkenthető.

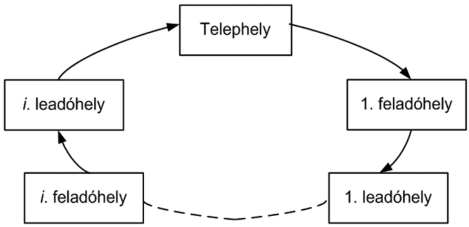
A szállítási költség minimálásának első lépése az optimális töltőállomás helyének meghatározása. Ennek meghatározása az indulási üzemanyagszint, valamint az út során az üzemanyag fogyásának ismeretében lehetséges. Az üzemanyagszint fogyásának pontos meghatározására egy számítási módszer került kidolgozásra, mely figyelembe veszi a szállító jármű alapfogyasztását, valamint a domborzati viszonyokból és a szállított hasznos teher mértékéből adódó többletfogyasztást. Ezen módszer alapján meghatározható, hogy az út során hol fog egy adott szint alá csökkenni az üzemanyagszint, ahol tankolóállomást kell keresni. Ezen körzetben többnyire számos, bár különböző egységárú töltőállomás található. A feladat azon töltőállomás meghatározása (akár kicsit távolabbi, de alacsonyabb egységárú kúton), ahol tankolva a legkisebb összköltségű út valósítható meg.

A kidolgozott módszer arra is alkalmas, hogy a járművezető számára meghatározza, milyen mennyiségű üzemanyagot kell tankolnia a célállomáshoz való biztonságos megérkezéshez.

A matematikai modellünkben felhasználjuk azt a tényt, hogy ismerjük két csomópont, vagy csomópont és kút közti legrövidebb útvonalat. A csomópontok, a benzinkutak azonosítására rendelkezésre állnak digitális térképek, amelyek biztosítják a csomópontok koordinátáit. Ezek mellett a domborzati viszonyokra is kapunk információt, ami szintén fontos, hiszen a fogyasztás eltérő lehet hegymenetben, illetve síkmenetben. Az üzemanyag-forgalmazótól megkérhetők a lehetséges üzemanyagtöltő állomások *x, y* koordinátái, valamint az egyes kutaknál az aktuális üzemanyagár. A digitális útvonaltérképek az úthálózatokat rövid egyenes szakaszokra bontják (Gubán 2001). Ez a megoldás lehetővé teszi, hogy keresési algoritmussal megkereshessük a csomópontok közti legrövidebb utat. A legrövidebb út keresésére a szakirodalomban több módszer is található (Zhang 2001; Russell 2005; Bazaraa 2007), de útvonaltáblázatok (adattáblák) is rendelkezésre állnak (Gubán 2012). A heurisztikus keresési algoritmusok közé tartozik a számítógépes környezetben könnyen megvalósítható módszer, az A* algoritmus. Ez az algoritmus a legjobbat-először keresés leginkább ismert változata. Az adatok és a legrövidebb út keresési módszerek ismeretében már feltételezhetjük, hogy számunkra rendelkezésre állnak a fel- és lerakóhelyek és kutak közti legrövidebb útvonalak.

A szállító jármű fogyasztásának meghatározása, az ideális üzemanyag-felvételi helyek körzetének meghatározása

Egy szállítási körjárat minden esetben a vállalat telephelyéről indul az első árufeladó helyig, ahonnan a jármű az első leadóhelyre megy, majd onnan egy újabb feladóig, illetve leadóig, stb. (1. ábra). Az utolsó leadóhely után a jármű az útját a telephelyen fejezi be. A körjáratban a fel- és leadóhelyek száma tetszőleges számú lehet, sőt egy leadóhely egyben feladóhely is lehet (Kovács 2006, 2007).



Forrás: saját szerkesztés

1. ábra. Körjáratok felépítése

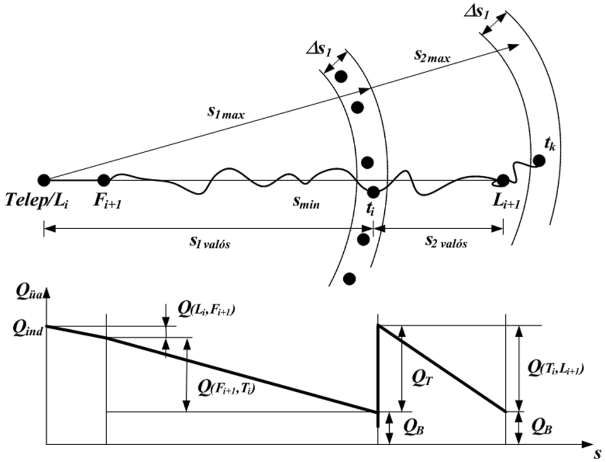
A feladat az *x, y* koordinátákkal definiált indulási pontból egy adott célállomásba történő szállítás esetén a járművezetők számára előírni a vállalat által előírt üzemanyagtöltő állomások közül – az indulási üzemanyagszint, valamint a jármű fogyasztása ismeretében – azt a töltőállomást, ahol a járművezető tankolhat, ezzel megvalósítva a leggazdaságosabb áruszállító járatot, valamint meghatározni a tankolandó üzemanyag mennyiségét is, mely az adott szállítási feladat biztonságos teljesítéséhez elegendő.

A szállítóvállalatok többsége – a nagy mennyiségű üzemanyag felhasználásának köszönhetően – valamely szerződéses üzemanyag-forgalmazó partner kútjainál kedvezményes áron tankolhat. Az üzemanyag-forgalmazó kiválasztásánál azokat részesítik előnyben, amelyeknek Európára kiterjedő üzemanyagtöltő állomáshálózata van.

Az ismertetett módszerek segítségével bármely kiválasztott két pont (például egy telephely és egy kút, feladóhely és lerakóhely) segítségével meghatározhatjuk a pontok közti legrövidebb útvonal hosszát. Ezt követően az összes lehetséges üzemanyag-felvételi hely közül kiválasztjuk azokat a lehetséges üzemanyag-felvételi helyeket, melyek a vizsgált terület szempontjából számításba jöhetnek, ami jelentősen csökkentheti a végső modellben szereplő változók számát.

A járat indításakor ismert az indulási pont – mely a telephely (*Telep*) vagy az *i*-edik leadási hely (L_i) lehet –, illetve az árufeladó pont (F_{i+1}), valamint a célállomás leadóhelye (L_{i+1}) (2. ábra).

A feladat tehát meghatározni, hogy ismert indulási üzemanyagszint mellett a jármű tudja-e teljesíteni a teljes szállítási feladatot, vagy az árufeladási és -leadási pontok között tankolnia kell. Amennyiben szükséges az üzemanyag-felvétel, meg kell határozni az ideális tankolási pontot és az üzemanyag-felvétel mennyiségét.



Forrás: saját szerkesztés

2. ábra. Lehetséges üzemanyag-felvételi helyek meghatározása és az üzemanyagszint alakulása az út során

A számítás során célszerű a járatokat szakaszokra bontani, mely szakasz alatt az egy feladó- és egy leadóállomás közötti utat értjük. Ez azért szükséges, mivel az egyes szakaszok teljesítése során az egyes költségösszetevők értéke különbözik, mégpedig az eltérő hasznos szállított tehertől, a különféle útviszonyoktól stb. függően.

A járatszakaszok megtétele esetén adódó költség a következők szerint számítható ki:

$$K_\alpha = \sum_\beta s_{\alpha\beta} \cdot k_{\alpha\beta} \ [euro] \tag{1}$$

ahol: $s_{\alpha\beta}$ – az α-adik járat β-adik szakaszának úthossza [km];

$k_{\alpha\beta}$ – a járat fajlagos költsége az α-adik járat β-adik szakaszánál $\left[\frac{euro}{km}\right]$;

β – az egyes szakaszok azonosítója.

Az üzemanyag-felhasználás alapvetően a jármű terheletlen állapotban való fogyasztásától, a szállított hasznos teher nagyságától, valamint a domborzati viszonyoktól függ.

$$k_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}(f_ü + f_ü \cdot \varepsilon^D_{\alpha\beta} + \varepsilon^T \cdot q_{\alpha\beta}) \left[\frac{euro}{km}\right] \quad (2)$$

ahol: $p_{\alpha\beta}$ – az üzemanyag egységár $\left[\frac{euro}{liter}\right]$; $f_ü$ – a fajlagos fogyasztás üres jármű esetén $\left[\frac{euro}{km}\right]$;

$\varepsilon^D_{\alpha\beta}$ – a domborzati viszonyoktól függő korrekciós tényező, mely értéke a következő lehet:

0 – normál (normál síkságon történő haladás esetén), 0,3 – középnehéz (dombságon történő haladás esetén), 0,6 – nehéz (hegymenetben);

ε^T – a terheléstől függő korrekciós tényező, ami azt jelenti, hogy a jármű minden egyes többlettonnányi terhelés esetén 0,5 literrel többet fogyaszt $\left[\frac{liter}{tonna \cdot km}\right]$; $q_{\alpha\beta}$ – a jármű hasznos terhelése [*tonna*].

A korrekciós tényezők meghatározása egy – a szerzők által egy fuvarozó vállalatnak korábban végzett – kutatás-fejlesztési munka során kiértékelt szállítási tevékenységek alapján történt (Kovács 2006, 2007).

A járat indulásakor ismert a jármű indulási üzemanyagszintje (Q_{ind}), valamint folyamatosan számítható a járműüzemanyag felhasználása az egyes feladási és leadási pontok között (2. ábra).

Az ideális tankolási hely meghatározásánál feltétel, hogy egy Q_B biztonsági üzemanyag-mennyiséggel még rendelkezzen a jármű. Ez az üzemanyag-mennyiség biztosítja az L_i és t_i pontok közötti esetleges útelterelésből vagy a gépjárművezető eltévedéséből adódó többletüzemanyagot, így biztonságosan teljesíthető az útszakasz. A biztonsági üzemanyagszintet egy konkrét üzemanyag-mennyiségben vagy a szállítási távolság százalékos arányában adhatjuk meg. Hasonlóan definiálhatjuk a járműnek a telephelyre visszatérésekor szükséges minimális üzemanyag mennyiségét. Jelöljük ezt a mennyiséget Q_z-vel. Ez az üzemanyag-mennyiség biztosítja azt, hogy a jármű a telephelyen vagy a közelében található kúthoz eljusson, és a következő induláshoz szükséges üzemanyag-mennyiségre tankolhasson (Q_{ind}).

A fenti összefüggések ismeretében, valamint figyelembe véve a biztonsági készletszintre (Q_B) vonatkozó előírásokat, számítható ki az első tankolási pontig megtehető távolság (s_{1max}) (2. ábra).

$$S^{\alpha\beta}_{1max} = \frac{Q_{ind} - Q_B}{f_ü + f_ü \cdot \varepsilon^D_{\alpha\beta} + \varepsilon^T \cdot q_{\alpha\beta}} \quad (3)$$

Ez a sugárív ($s_{1max} - \Delta s_1$) definiálja a számításba jöhető t_i tankoló állomások koordinátáját, melyek közül kell az ideális helyet megtalálni. Δs_1 mértéke tetszőlegesen megadható, mely azt a távolságot jelenti, hogy milyen távolsággal kell már az üzemanyag elfogyása előtt üzemanyagtöltő állomást keresni.

Az optimális üzemanyagtöltő-állomás helyének és a tankolandó üzemanyag mennyiségének a meghatározása

Az optimális töltőállomásokat a korábban kiválasztott ideális töltőállomások közül fogjuk kiválasztani. Bár a modell számára nem szükséges ez az előzetes szelekció, azonban a gyakorlati feladatok megoldásakor jelentősen egyszerűsíthető a megoldás, illetve a modell mérete is jelentősen csökken. A továbbiakban a modellt a megfogalmazott gyakorlati problémához képest általánosabb értelemben definiáljuk a későbbi továbbfejleszthetőség érdekében. A matematikai modellhez a korábban meghatározott adatokat, változókat a modellhez igazítva adjuk meg, ezért az alábbiakban pontosítjuk a jelöléseket.

Az ismert adatok

Egy konkrét fuvarterv rögzíti azokat a helyeket (feladóhelyek, leadóhelyek), amelyeket az árurakodás szempontjából figyelembe kell venni. Ezeknek a sorrendje előre adott. Ezt a sorrendet használjuk a fel- és lerakóhelyek azonosítására.

Jelölje N a fel- és lerakóhelyek számát, beleértve a kezdő és végső telephelypontot (ez lehet ugyanaz is körjárat esetén, de ebben az esetben két különböző indexszel jelöljük). Az egyes fel- és lerakóhelyeket egy 1 és N közti természetes számmal jelöljük. A továbbiakban a fel- és lerakóhelyeket nem különböztetjük meg (általában *csomópontoknak* fogjuk hívni őket). Az eredeti gyakorlati problémában szerepel a fel- és lerakóhely. A modellünkben általánosabban kezeljük ezt a két fogalmat. Úgy tekintjük, hogy egy csomópontban lehet árut leadni és felrakni is. Ezután egy csomópontot *felrakóhelynek* nevezünk, ha a járművön szállított áru súlya kisebb a csomópontba beérkezés előtt, mint a csomópontból kiindulás után. Ellenkező esetben *lerakóhely* lesz a csomópont. A kezdőpont felrakóhely lesz, ha nem üresen indul a jármű, és a végpont (ami a kezdőponttal azonos is lehet) lerakóhely, ha nem üresen érkezik be a jármű.

Definíciók

Útszakasz. A továbbiakban *útszakasznak* nevezzük egy fel- vagy lerakóhely és a fuvarterv szerinti következő le-, illetve felrakóhely között vezető utak halmazát. A gyakorlatban több út is vezethet két csomópont között, ezeket a kutaknál fogjuk definiálni. Az útszakaszt az i indexszel fogjuk jelölni.

Ebből következik, hogy a továbbiakban az α járat azonosítót és azon belül a β gyakorlatban létező útszakaszt a továbbiakban egyszerűen azonosíthatjuk a járat csomópontjaival és a csomópontokhoz tartozó útszakasz azonosítóival (az útszakaszokat k-val fogjuk jelölni). Ezt a jelölést a számítógépes megoldás indokolja.

Kutak halmaza, lehetséges útszakasz. Jelölje T_i az i-edik indulási hely és az $i + 1$-edik végpont közti kutak halmazát. Ekkor $\tau_\mathrm{i} = |T_\mathrm{i}|$ jelöli az i-edik útszakaszon a kutak számát (az útszakasz indexe megegyezik a kezdőpontja indexével). A kutakhoz tartozó útszakasz egy útját *lehetséges útszakasznak* fogjuk hívni. A lehetséges útszakaszt az i, k indexekkel jelöljük. Egy lehetséges útszakaszon legfeljebb csak egy kút lehet. Ha több van, akkor a modell mindig átalakítható olyan modellé, ahol minden útszakaszon legfeljebb egy kút van (lásd a 4. megjegyzés állítását).

Kutak jelölése. Jelölje $t_{ik} \in T_i$ a k-adik kutat (azaz a k-adik lehetséges útszakaszhoz tartozó kutat) az i-edik útszakaszon.

Útszakaszon található kutak maximális száma. Jelölje egy útszakaszhoz tartozó kutak maximális számát $H(H = max_i\tau_i)$. Amely i-edik útszakaszon a kutak száma kevesebb mint H, ott *fiktív lehetséges útszakaszokat* veszünk fel $\tau_i + 1$ és H között. A lehetséges útszakasz hosszát elegendően nagy értékre választva biztosítható, hogy ezt a lehetséges útszakaszt nem választjuk az optimalizálás során. Ez biztosítja, hogy a modellben mindegy, hogy a vizsgálatot egy útszakaszon τ_i vagy H lehetséges útszakaszra adjuk meg (egymással helyettesíthető a két érték). A 0-dik út (0 indexű) a tankolás nélküli útszakasz. Ezen a lehetséges útszakaszon a jármű nem áll meg, itt tankolás nem történik.

Domborzati viszonyok. Az egyes lehetséges útszakaszokhoz a modellben két domborzati viszonyokhoz tartozó tényező tartozik: az egyik tényező a lehetséges útszakasz kezdőpontjától a kútig tartó szakasz domborzati tényezője lesz, a másik a kúttól a lehetséges útszakasz végéig tartó szakasz domborzati tényezője lesz.

• Jelölje ε_{ik}^{DL} az i, $i+1$ relációban a k-adik kútig tartó lehetséges útszakasz domborzati viszonyoktól függő tényezőjét.

• Jelölje ε_{ik}^{DM} az i, $i+1$ relációban a k-adik kúttól tartó lehetséges útszakasz domborzati viszonyoktól függő tényezőjét.

Terhelési tényező. Jelölje ε^T a terheléstől függő korrekciós tényezőt [lásd (2)].

Egységár mátrix. Jelölje p_{ik} a t_{ik} kútnál az üzemanyag egységárát ($P = [p_{ik}]_{N\times H+1}$). $p_{i0} = 0$ ($i = 1; \ldots; N$).

Távolság mátrixok. A távolságadatokat is – a tényezőkhöz hasonlóan – két részre bontjuk: a lehetséges útszakasz kezdőpontjától a kútig tartó szakasz hossza és a kúttól a lehetséges útszakasz végéig tartó szakasz hosszára.

• Jelölje l_{ik} az i-edik indulási helytől az $i+1$-edik végpont között a k-adik kútig tartó útvonalának hosszát ($L = [l_{ik}]_{N\times H+1}$).

• Jelölje m_{ik} az i-edik indulási helytől az $i+1$-edik végpont között a k-adik kúttól a végpontig tartó útvonalának hosszát ($M = [m_{ik}]_{N\times H+1}$).

• Használni fogjuk az i-edik útszakasz hosszát is: $s_{ik} = l_{ik} + m_{ik}$ ($S = [s_{ik}]_{N\times H+1}$).

A szállítandó mennyiségek vektora. Jelölje q_i az i, $i+1$ relációban szállítandó mennyiséget. Üresjárat esetén 0. Így egységesen tudjuk kezelni mind a rakodott, mind az üresjáratokat. ($q = [q_i]_{N-1}$)

A fajlagos fogyasztás. Jelölje $f_ü$ a fajlagos fogyasztást $\left[\frac{liter}{km}\right]$ lásd (2) alatt.

Az üzemanyagtank kapacitása. Jelölje Q_{max} az üzemanyagtank méretét.

Megjegyzések

1. Az **L**, **M**, **S**, **P** mátrixok esetén a megvalósításkor – számítástechnikai okok miatt – az indexek 0-tól indulnak és H-ig fognak futni.

2. Praktikus okok miatt a 0-adik útnál a teljes úthossz l-hez tartozik, $m = 0$ lesz ($l_{i0} = s_{i0}$, $m_{i0} = 0$).

3. Ha az autópályán, azaz a 0-adik úton is lehet tankolni, akkor ezt az utat még egyszer fel kell venni, de már a kúthoz tartozó l-lel és m-mel. Ebben az esetben az autópálya-útszakasznak valójában két lehetséges útszakasz felel meg, mindkettő azonos jellemzőkkel (hossz és domborzati viszonyok). Ekkor a 0 indexű szakasz választása a tankolás nélküli továbbhaladást jelenti, a 0-tól különböző lehetséges útszakasz választása pedig az autópálya-szakaszon történő tankolást jelenti. Amennyiben több kút is van a pályán, akkor az alábbi 1. Állítás szerint kell eljárni.

4. Egy csomópontból kétféleképpen mehetünk tovább a következő csomópontba:

a) *szabad választással*, azaz egy csomópontból kiindulva a lehetséges útszakaszok között szabadon választhatunk,

b) *kötelező továbbhaladással*, azaz ha a k-adik lehetséges útszakaszról érkezünk, akkor a következő csomópontba is a k-adik szakaszon keresztül kell menni. Ennek jelentősége az alábbiak miatt van.

A kutak és a lehetséges útszakaszok egymáshoz rendelése

A gyakorlatban egy feladó- és leadóhely közti lehetséges útszakaszon több benzinkút is lehet. Az alábbiakban megadott matematikai modellben a könnyebb kezelhetőség érdekében feltételezzük, hogy minden lehetséges útszakaszon csak egy benzinkút van (ez könnyíti a feladat megoldását is). Az alábbi két állítással azt mutatjuk meg, hogy a gyakorlatban felmerülő problémához kapcsolódó modellt mindig átalakíthatjuk olyan modellé, amelyik teljesíti azt a feltételt, hogy egy lehetséges útszakaszon legfeljebb egy benzinkút van.

1. Állítás. Az eredeti probléma mindig átalakítható olyan feladattá, ahol két csomópont között legfeljebb egy kút van.

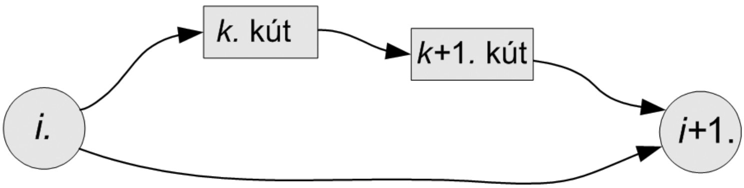
Az alábbiakban bemutatjuk, hogyan lehet felbontani egy lehetséges útszakaszt több lehetséges útszakaszra, ha több kút is esik ugyanarra a lehetséges szakaszra. Az eredeti problémában minden csomópontot jelöljük *szabad választásúnak* (3. ábra).

Az állítás során két esetet különböztetünk meg:

1. eset: Az első esetben tekintsük azokat a több kúttal rendelkező lehetséges útszakaszokat, amelyekre teljesül, hogy minden kútjához el lehet jutni a járművel az előző lehetséges útszakaszok valamelyik benzinkútjától, ha ott teljesen feltöltik az üzemanyagtartályát. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy az *i.* lehetséges útszakasz bármelyik benzinkútjáig eljuthatunk anélkül, hogy az *i.* szakaszon igénybe kellene venni egy másik kutat.

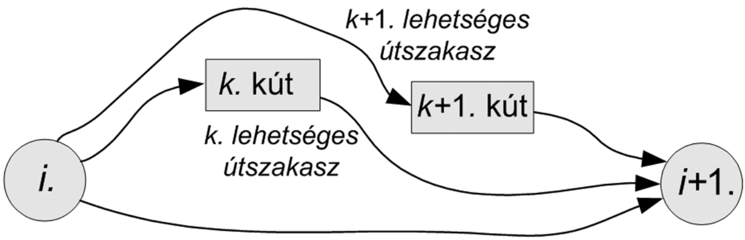
Válasszunk ki egy ilyen lehetséges útszakaszt és bontsuk fel annyi lehetséges útszakaszra, amennyi kút van az előző megjegyzés 3. pontjához hasonlóan (4. ábra). Hajtsuk végre ezt a lépést az összes ilyen lehetséges útszakaszra. Ekkor a feltételnek eleget tevő korábbi lehetséges útszakaszokat helyettesítettük több olyan lehetséges útszakasszal, melyek a modell feltételeinek eleget tesznek.

Példa. Egy lehetséges útszakaszon két kút található az 1. eset feltételei alapján.



Forrás: saját szerkesztés

3. ábra. Az *i*-edik és *i + 1*-edik csomópont közti egyik lehetséges útszakaszon két kút van. Induló eset



Forrás: saját szerkesztés

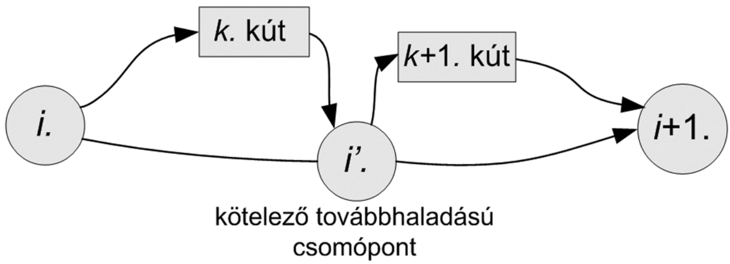
4. ábra. A megoldás. A lehetséges útszakaszt két lehetséges útszakasszal helyettesítjük az 1. esetnél leírtak alapján

2. eset: Ha nem tudjuk teljesíteni az 1. esetet, azaz a lehetséges útszakasznak van olyan kútja, mely nem érhető el közvetlenül tele tankkal az előző lehetséges útszakaszok semelyik kútjától. Ez azt jelenti, hogy a lehetséges útszakaszon van olyan kút, mely csak úgy érhető el, ha már ezen a lehetséges útszakaszon valahol tankolunk. Ebben az esetben az i-edik útszakaszhoz iktassunk be egy fiktív csomópontot az eredeti csomópontok közé úgy, hogy a lehetséges útvonal két kútja közé essen, és teljesüljön az egyes lehetséges útszakaszok teljesítésének feltétele (5. ábra). Ekkor az i, $i+1$ reláció összes lehetséges útszakaszánál meg kell tenni a fiktív pont felvételét és a lehetséges útszakasz szétbontását. Ez bármelyik pont lehet a relációban, kivéve – számítástechnikai okok miatt – a lehetséges útszakasz kútjához tartozó pont. A megbontott útszakaszokat úgy indexeljük, hogy a fiktív csomópontba beérkező útszakasz k indexe megegyezzen a megbontott útszakasznak a fiktív csomópontból kimenő lehetséges útszakasz indexével. Ezután ezt a felvett csomópontot *kötelező továbbhaladású* csomópontként kell felvenni (5. ábra). Ha most sem teljesül, akkor alkalmazzuk a 2. esetben leírtakat addig, amíg nem teljesül a modell elvárt feltétele, vagy olyan útszakaszt nem kapunk, amelyen nincs kút és a szakasz nem teljesíthető (ettől még a feladat megoldható lehet).

A kötelező áthaladású csomópont bevezetésére azért van szükség, mert bár két lehetséges útszakaszra bontottuk fel az eredeti útszakaszt, de a továbbhaladás már – az előzőekkel szemben – nem szabadon választható, hiszen a második kúthoz csak az első kútnál történt tankolással juthatunk el. Ugyanakkor a csomópont beszúrása biztosítja azt, hogy egy lehetséges útszakaszon legfeljebb egy csomópont lesz.

Példa. Egy lehetséges útszakaszon két kút található a 2. eset feltételei alapján.

A kiindulási helyzet formailag hasonló a 3. ábrán látható helyzethez, azonban a 3. ábrán a k. és $k+1$. kút elérhető az előző lehetséges útszakasz valamelyik kútjától tele tankkal, míg a mostani kiinduló helyzetben a $k+1$. kút nem érhető el semelyik előző szakaszon található kúttól.



Forrás: saját szerkesztés

5. ábra. A megoldás. Egy *i'* csomópontot szúrunk be az *i*-edik és *i + 1*-edik csomópont közé a 2. esetben leírtak alapján. Ekkor *i'* kötelező továbbhaladású csomópont lesz

A modell ismeretlenjei

Az alábbi mátrix a változó adatok első csoportját tartalmazza. Elemei jelentik, hogy az adott útszakaszon melyik kútnál mennyit tankolunk. Jelölje

$$x_{ik} \geq 0, \qquad \mathbf{X} = [x_{ik}]_{N \times H} \geq \mathbf{0} \tag{4}$$

az i-edik indulási helytől az $i + 1$-edik végpont között a k-adik kútnál tankolt üzemanyag mennyiségét. $k = 0$ esetén az adott szakaszon nem történik tankolás. Ebben az esetben fiktív mennyiség lesz az értéke: $x_{i0} = 1$. Ez nem jelent problémát, hiszen a költségben és az üzemanyag-fogyasztásban ez a 0. változó nem fog megjelenni.

Az előjelfüggvény segítségével tudjuk kezelni a következőket: ha egy kútnál 0 liternél nagyobb mennyiséget tankoltunk, akkor van tankolás, melyet az 1 érték reprezentál, és ha 0 mennyiséget tankoltunk, akkor a tankolás értéke 0, azaz nem történt tankolás. Ezek alapján

$$\sum_{k=0}^{\tau_i} sgn(x_{ik}) = 1, \tag{5}$$

azaz valamelyik lehetséges útvonalat kell választani.

Az előző összefüggés segítségével meghatározhatjuk a teljes útvonal hosszát. Ez nem szerepel a modellben, azonban a járattervezéshez fontos és szükséges, például a járat időtartamának, pihenőidők, járművezetők számának meghatározásához. Ezek alapján

$$\sum_{k=1}^{H} sgn(x_{ik}) \cdot s_{ik} = \sum_{k=1}^{H} sgn(x_{ik}) \cdot (l_{ik} + m_{ik}) \tag{6}$$

jelenti az i, $i+1$ közötti útszakasz hosszát, hogyha a k-adik kútnál tankolunk. Ezek alapján a járat során a tankolási kitérőket is figyelembe véve a gépjármű által megtett út hossza:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{H} sgn(x_{ik}) \cdot s_{ik} \,. \tag{7}$$

Jelölje Q_i az i. csomópontnál a jármű üzemanyag-mennyiségét.

$$\mathbf{Q} = [Q_i]_N \,. \tag{8}$$

Ekkor a tankolást követő csomópont üzemanyag-mennyiségét a következőképpen írhatjuk fel:

$$Q_{i+1} = Q_i + \sum_{k=0}^{H} sgn(x_{ik}) \cdot [-(l_{ik} + m_{ik}) \cdot (f_{ü} + f_{ü} \cdot \varepsilon_{ik}^{DM} + \varepsilon^{T} \cdot q_i)] + x_{ik} \,, \tag{9}$$

azaz az előző csomópontnál rendelkezésre álló üzemanyag-mennyiség csökken a megtett útszakaszon a terheléstől és a súlytól függő fogyasztással, ugyanakkor hozzáadódik a szakaszon tankolt mennyiség.

További feltétel, hogy a minimális biztonsági szint alá nem mehet az üzemanyagszint. A kútnál rendelkeznie kell a minimális üzemanyag-mennyiséggel. Az aktuális tankolási helyen a rendelkezésre álló üzemanyag mennyisége megegyezik az utolsó csomópontnál rendelkezésre álló üzemanyag-mennyiség csökkentve a kútig tartó útvonalon elfogyasztott üzemanyag mennyiségével:

$$Q_i - \sum_{k=0}^{H} sgn(x_{ik}) \cdot l_{ik} \cdot (f_{ü} + f_{ü} \cdot \varepsilon_{ik}^{DM} + \varepsilon^{T} \cdot q_i) \geq Q_B \,. \tag{10}$$

A tankolt mennyiség (x_{ik}) nem lehet több, mint amennyi az üzemanyagtankba fér. Ezt az üzemanyagtank mérete és a tankban maradt üzemanyag különbsége határozza meg:

$$x_{ik} \leq Q_{max} - Q_i + l_{ik} \cdot (f_{ü} + f_{ü} \cdot \varepsilon_{ik}^{DM} + \varepsilon^{T} \cdot q_i) \,. \tag{11}$$

Jelölje O azon csomópontok indexeinek halmazát, melyek kötelező továbbhaladású csomópontok. Ebben az esetben ugyanolyan k indexű lehetséges útszakaszon kell haladnunk, mint amelyről érkeztünk.

Ekkor a következő feltétel érvényes a kötelező továbbhaladású csomópontokra:

$$sgn(x_{ik}) = sgn(x_{i+1,\,k}),\ i \in 0,\ k = 0,\ \ldots,\ H. \tag{12}$$

A célállomásra érkezéskor ($i = N$) a gépjárműnek egy meghatározott üzemanyag-mennyiséggel kell rendelkeznie (Q_Z) ahhoz, hogy a következő járat indulását megfelelően elő tudják készíteni:

$$Q_N \geq Q_Z\,. \tag{13}$$

Jelölje K_{t_i} az $i,\ i + 1$ relációban tankolt mennyiség költségét (ha nem történt tankolás, akkor 0), valamint

$$K_T = \sum_{i=1}^{N-1} K_{t_i}\,. \tag{14}$$

A tankolás költsége az adott kútnál:

$$K_{t_i} = \sum_{k=0}^{H} p_{ik} \cdot x_{ik}\,. \tag{15}$$

Megjegyzés

A (9) feltételt az alábbi formában fogjuk használni:

$$\begin{aligned} Q_{i+1} = Q_i + sgn(x_{i0}) \cdot [-(l_{i0} + m_{i0}) \cdot (f_ü + f_ü \cdot \varepsilon_{i0}^{DM} + \varepsilon^T \cdot q_i)] + \\ + \sum_{k=1}^{H} sgn(x_{ik}) \cdot [-(l_{ik} + m_{ik}) \cdot (f_ü + f_ü \cdot \varepsilon_{ik}^{DM} + \varepsilon^T \cdot q_i)] + x_{ik}. \end{aligned} \tag{16}$$

(16)-ban a k indexe 1-től indul és külön ki van emelve a 0-s index. Ez azért van, mert a 0-s útnál nincs tankolás, így az akármilyen értéket vesz is fel, nem befolyásolja a tankban lévő üzemanyag mennyiségét. A célfüggvénynél a 0-s ár miatt nem kerül be a költségek közé. Egyébként – mint az korábban leírtuk – ha nem történik tankolás egy szakaszon, akkor a hozzá tartozó 0-s szakasz x értéke nagyobb lesz, mint 0. Ez „fiktív” tankolás, ami nem kerül valójában az üzemanyagtankba.

Az optimalizálás során alkalmazott célfüggvény

A célfüggvény az indulótank benzinköltségét jelenti (fix költség), valamint az útközben tankolt benzin mennyiségének a költségét csökkentve a maradék benzin költségével (változó költség), azaz

$$K = K(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) = K_{ind} + K_T - K_{maradék}$$
$$= K_{ind} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{H} p_{ik} \cdot x_{ik} - \sum_{k=1}^{H} sgn(x_{N-1,\,k}) \cdot p_{N-1,\,k} \cdot Q_N. \tag{17}$$

Az utóbbi kifejezés azt jelenti, hogy azzal az egységárral kell csökkenteni a megmaradt üzemanyag költségét, amivel azt vásároltuk, azaz az utolsó tankolóhely költségével.

A cél:

$$K = K(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) \rightarrow \min. \tag{18}$$

A problémát egy matematikai programozási feladatként adhatjuk meg.

Megjegyzések a (17) célfüggvényhez:

1.

$$\sum_{k=1}^{H} sgn(x_{N-1,\,k}) \cdot p_{N-1,\,k} \cdot Q_N = \sum_{k=0}^{H} sgn(x_{N-1,\,k}) \cdot p_{N-1,\,k} \cdot Q_N, \tag{19}$$

tehát a számítástechnikai megoldás során a k indexet praktikus okok miatt indíthatjuk 0-tól, azaz be tudjuk venni a kút nélküli utakat is a számításba anélkül, hogy befolyásolnák az eredményt.

2. A K_{ind} az optimalizálás során elhagyható, hiszen ez konstans és így nem befolyásolja az optimumot. Ekkor jelölje

$$K' = K'(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^{N-1} K_{T_i} - K_{maradék}. \tag{20}$$

Az optimális üzemanyagtöltő-állomás helyének és a tankolandó üzemanyag mennyiségének a meghatározására szolgáló modell egyszerűsítése

A modellezés során szükséges volt, ugyanakkor a megoldások során problémát jelent az előjelfüggvény használata. Azért, hogy az ebből eredő problémákat kiküszöböljük, vezessük be az

$$y_{ik} \in \{0; 1\} \tag{21}$$

bináris változókat. Minden x_{ik} változóhoz rendeljünk egy y_{ik} változót!

Alakítsuk át a

$$\sum_{k=0}^{H} sgn(x_{ik}) = 1 \tag{22}$$

feltételt az alábbi módon:

$$y_{ik} \leq x_{ik} \leq [Q_{max} - Q_i + l_{ik} \cdot (f_ü + f_ü \cdot \varepsilon_{ik}^{DL} + \varepsilon^T \cdot q_i)] \cdot y_{ik}$$
$$\sum_{k=0}^{H} y_{ik} = 1. \tag{23}$$

A kötelező továbbhaladású csomópontok feltétele már egyszerűen átalakítható: a (13) feltételnek megfelel a módosított modellben az

$$y_{ik} = y_{i+1,\,k},\ i \in O,\ k = 0, \ldots, H \tag{24}$$

feltétel. Ekkor a (10) feltétel a következőképpen fog alakulni:

$$y_{i0} \cdot [-(l_{i0} + m_{i0}) \cdot (f_ü + f_ü \cdot \varepsilon_{i0}^{DM} + \varepsilon^T \cdot q_i)] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{H} \{y_{ik} \cdot [-(l_{ik} + m_{ik}) \cdot (f_ü + f_ü \cdot \varepsilon_{ik}^{DM} + \varepsilon^T \cdot q_i)] + x_{ik}\} + Q_i - Q_{i+1} = 0, \tag{25}$$

$i = 1, \ldots, N-1.$

A problémát a (25) feltétel

$$\sum_{k=1}^{H} y_{ik} \cdot x_{ik} \tag{26}$$

kifejezése okozza, mely két változó szorzatát jelenti. Valójában, ha $y_{ik} = 0$, akkor $x_{ik} = 0$ és ha $y_{ik} = 1$, akkor $x_{ik} > 0$. Ebből következik, hogy $y_{ik} \cdot x_{ik} = x_{ik}$ $k \in \{1, \ldots, H\}$ (23) miatt.

Ebből következik, hogy a (25) feltétel a következő lesz:

$$\sum_{k=0}^{H} y_{ik} \cdot [-(l_{ik} + m_{ik}) \cdot (f_ü + f_ü \cdot \varepsilon_{ik}^{DM} + \varepsilon^T \cdot q_i)] + \sum_{k=1}^{H} x_{ik} + Q_i - Q_{i+1} = 0, \tag{27}$$

$i = 1, \ldots, N-1.$

Ezzel a feltétel lineáris feltétellé alakult.

Az optimális üzemanyagtöltő-állomás helyének és a tankolandó üzemanyag mennyiségének meghatározására szolgáló végleges modell

Az alábbiakban átalakított modellt foglaljuk össze.

A feltételrendszer

A végleges modell feltételrendszere az alábbi lesz (jobb oldalra konstansra rendezve):

$$x_{ik} \geq 0,\ i = 1, \ldots, N-1;\ \mathrm{k} = 0, \ldots, H \tag{28}$$

$$y_{ik} \in \{0; 1\},\ i = 1, \ldots, N-1;\ \mathrm{k} = 0, \ldots, H \tag{29}$$

$$\sum_{k=0}^{H} y_{ik} = 1,\ i = 1, \ldots, N-1 \tag{30}$$

$$Q_1 = Q_{ind} \tag{31}$$

$$Q_i - \sum_{k=0}^{H} y_{ik} \cdot l_{ik} \cdot (f_{ü} + f_{ü} \cdot \varepsilon_{ik}^{DL} + \varepsilon^{T} \cdot q_i) \geq Q_B,\ i = 1, \ldots, N-1 \tag{32}$$

$$x_{ik} - y_{ik} \geq 0,\ i = 1, \ldots, N-1;\ k = 0, \ldots, \tau_i \tag{33}$$

$$\begin{gathered} x_{ik} - [Q_{max} - \mathrm{Q}_i + l_{ik} \cdot (f_{ü} + f_{ü} \cdot \varepsilon_{ik}^{DL} + \varepsilon^{T} \cdot q_i)] \cdot y_{ik} \leq 0 \\ i = 1, \ldots, N-1;\ k = 0, \ldots, \tau_{\mathrm{i}} \end{gathered} \tag{34}$$

$$\begin{gathered} \sum_{k=0}^{H} y_{ik} \cdot [-(l_{ik} + m_{ik}) \cdot (f_{ü} + f_{ü} \cdot \varepsilon_{ik}^{DM} + \varepsilon^{T} \cdot q_i)] + \sum_{k=1}^{H} x_{ik} + Q_i - Q_{i+1} = 0, \\ i = 1, \ldots, N-1 \end{gathered} \tag{35}$$

$$y_{ik} - y_{i+1,\,k} = 0,\ i \in 0,\ k = 0, \ldots, H \tag{36}$$

$$Q_N \geq Q_Z \tag{37}$$

A végleges modell célfüggvénye

A fenti költségkomponensek alapján az alábbi célfüggvény adható meg a modellhez:

$$\begin{gathered} K' = K'\,(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Q}) = K_T - K_{maradék} = \\ = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{H} p_{ik} \cdot x_{ik} - \sum_{k=1}^{H} y_{N-1,\,k} \cdot p_{N-1,\,k} \cdot Q_N \rightarrow min \end{gathered} \tag{38}$$

2. Állítás. Igazolható, hogy ha akár egy tankolás is történt, akkor a gépkocsi a telephelyre érkezésre meghatározott minimális mennyiséggel (Q_Z) ér be a célba.

Bizonyítás. Kevesebbel a (37) feltétel miatt nem érkezhet. Tegyük fel, hogy a megoldás optimális, de több mint minimális mennyiséggel érkezik be a jármű. Ekkor vegyük a jelenlegi mennyiség és a biztonsági mennyiség (Q_Z) különbségét, és ezzel csökkentsük az utolsó tankolás mennyiségét. Ez kisebb költséget eredményez, így ellentmond annak, hogy az eredeti megoldás optimális volt.

Az állítás miatt a $K_{maradék}$ maradék értéke nem szükséges a számításokhoz, így elhagyható.

Megoldható az is, hogy egy kútnál egy minimális mennyiségnél kevesebbet ne lehessen tankolni. Ekkor az alábbi feltételt kell a modellhez felvenni:

$$\sum_{k=1}^{H} x_{ik} \geq \sum_{k=1}^{H} Q_{min_k} \cdot y_{ik} \tag{39}$$

Az optimalizálási feladat és annak megoldási módszere

A feladatot a későbbiekben egy általunk kifejlesztett alkalmazással szeretnénk megoldani, mely illeszkedik a fenti modellhez. A szoftver programozását a közeljövőben szeretnénk elvégezni. A végső alkalmazás adatbázisra épül (Gubán 2014; Demetrovics et al. 2006), felhasználóbarát módon és az alábbiakhoz hasonlóan oldja majd meg a gyakorlati problémákat.

Az alábbiakban a feladat megoldhatóságát és a modell alkalmazhatóságát egy egyszerű mintafeladattal szeretnénk megmutatni, melyet az MS Excel Solverjével oldottunk meg. A megoldás módszerének a Solver nem lineáris ÁRG módszerét (Gradiens módszert) választottuk (Gilbert 1992; Narendra 2002).

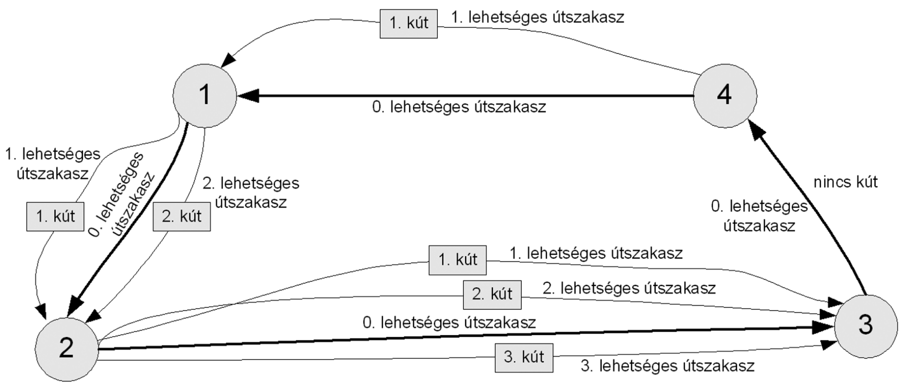
A mintafeladat és az adatai

Az alábbiakban egy mintafeladaton keresztül mutatjuk be a matematikai modellt és a feladat megoldását.

Tekintsünk egy olyan körjáratot, melyben négy csomópont van. Az 1. és 2. csomópont között két kút van, a 2. és 3. csomópont között 3 kút van, és a 4. és 1. csomópontok között csak egy kút található. A 3. és a 4. között nincs benzinkút. Minden szomszédos csomópont között vezet olyan lehetséges útszakasz, ahol nincs kút a *Definíciókat* követő 3. megjegyzés szerint alakítva (6. ábra). Minden lehetséges útszakaszon legfeljebb egy kút van szintén e megjegyzés alapján. A célállomás rendelkezik saját benzinkúttal, így a gépjármű beérkezés után itt tankolhat.

Az alábbiakban megadjuk az egyes adatok értékeit (az adatok fiktívek, bizonyos esetben eltérhetnek a valós technikai paraméterektől).

- $N = 4$.
- $H = 3$.
- Terhelési tényező: $\varepsilon^T = 0{,}02$.



Forrás: saját szerkesztés

6. ábra. A mintafeladat gráfja

- Biztonsági üzemanyagszint: $Q_B = 10$ [*liter*].
- Üresjárati fogyasztás: $f_ü = 0{,}1 \left[\frac{euro}{km}\right]$
- Egységár mátrix: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1{,}17 & 1{,}00 & Max \\ 0 & 1{,}23 & 1{,}13 & 1{,}00 \\ 0 & Max & Max & Max \\ 0 & 1{,}20 & Max & Max \end{bmatrix}$ [*euro*]. $Max = 10^9$

A *Max* ebben az esetben egy elegendően nagy értéket jelent. Ennek olyan nagy értéket kell választani, hogy az optimalizálás során az adott fiktív kút ne kerüljön a kiválasztottak közé (pl. az Excelben *Max* értékét 100000 euróra választottuk).

- Távolság mátrixok:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 320 & 200 & 180 & 200 \\ 300 & 160 & 190 & 120 \\ 340 & 340 & 340 & 340 \\ 240 & 190 & 150 & 150 \end{bmatrix} [km]$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 150 & 190 & 200 \\ 0 & 180 & 190 & 290 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 120 & 150 \end{bmatrix} [km]$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 320 & 350 & 370 & 400 \\ 300 & 340 & 380 & 410 \\ 340 & 340 & 340 & 340 \\ 240 & 250 & 270 & 300 \end{bmatrix} [km]$$

- Domborzati viszonyok:

$$\varepsilon^{DL} = \begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [km]$$

$$\varepsilon^{DM} = \begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [km]$$

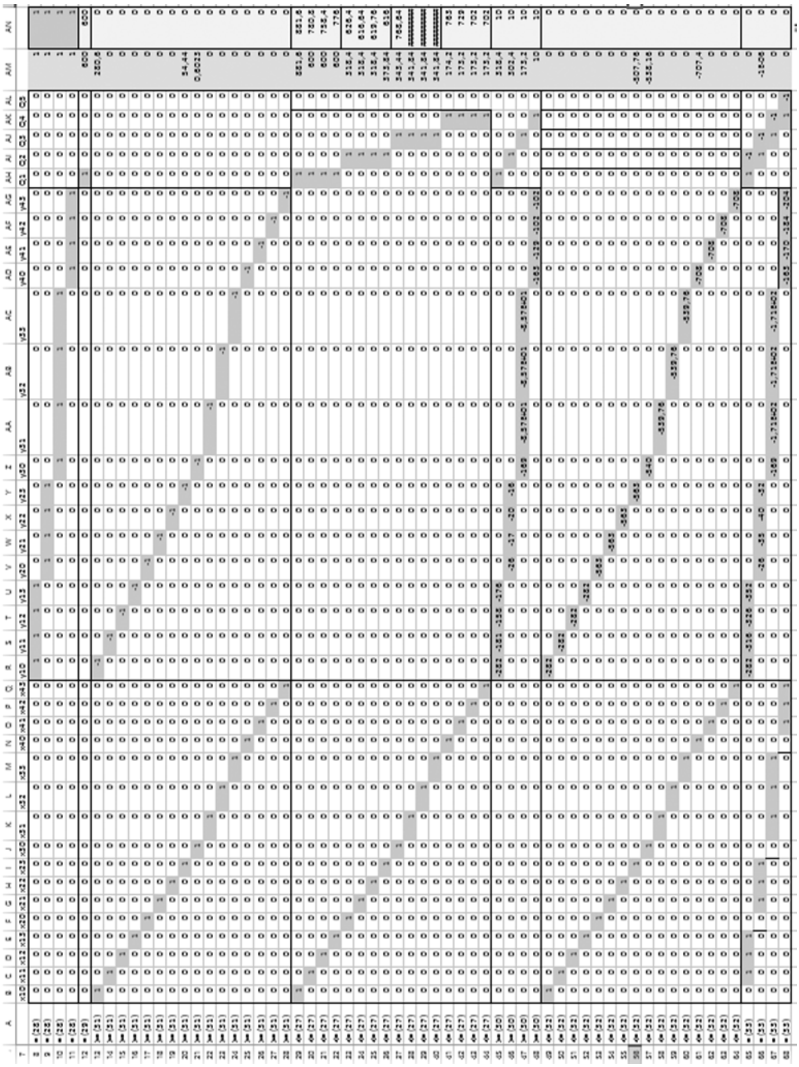
- Hasznos terhelés: $q = [40; 0; 20; 30]^*$ [*tonna*]
- $Q_{max} = Q_{ind} / 600$ [*liter*].
- A mintafeladatban feltételeztük, hogy a végcélban van tankolási lehetőség, így elegendő csak a biztonsági mennyiségnek megfelelő üzemanyagnak maradnia a gépjárműben, azaz $Q_B = Q_Z = 10$ [*liter*].

A mintafeladat megoldása MS Excel Solver alkalmazásával

A mintafeladat matematikai modelljének megfelelő számítástechnikai modellt a terjedelme miatt csak ábrán tudjuk megmutatni. A táblázat **A** oszlopában jelöltük az egyes feltételek relációját és azt, hogy az egyes sorok a modell mely feltételeihez tartoznak. Formailag és szerkezetileg a 8. ábra szerinti lesz a számítástechnikai modellje:

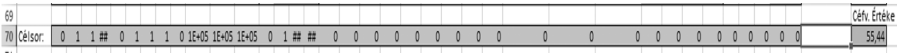
A MS Excelben a Solver beállításai a 9. ábrán láthatók. A célfüggvényt az AB70-es cella tartalmazza, a célfüggvénynek a lehetséges megoldáshalmazon a minimumát keressük. Az *x, y, q* változók az AP1: AP37 tartományban helyezkednek el. A korlátozó feltételeket a 7. ábra A1 oszlopának relációi alapján 6 csoportba foglalhatjuk, és ezeknek a csoportoknak elég egy korlátozó feltételt adni a Solverben. A 7. feltétel az *y* változók kétértékűségét biztosítja. A többi változó a modell szerint nem negatív. Ezt a *Nem korlátozott változók nemnegatívvá tétele* jelölődoboz bejelölésével adjuk meg.

A megoldás módszereként a *Nemlineáris ÁRG*-t választottuk.



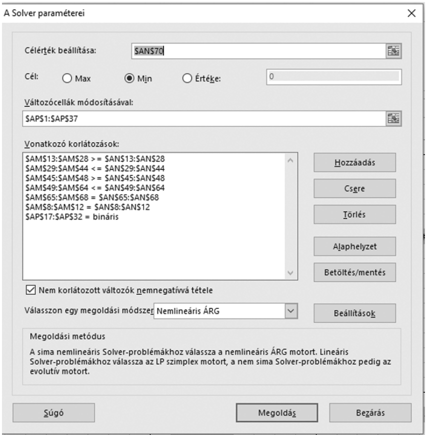
Forrás: saját szerkesztés

7. ábra. A számítástechnikai modell váza



Forrás: saját szerkesztés

8. ábra. A célfüggvény komponenseinek a sora



Forrás: saját szerkesztés

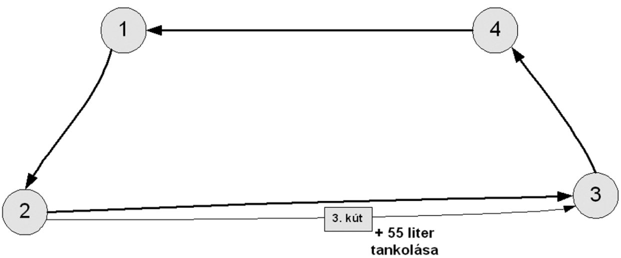
9. ábra. A Solver beállításai

x10	x11	x12	x13	x20	x21	x22	x23	x30	x31	x32	x33	x40	x41	x42	x43	y10	y11	y12	y13	y20	y21	y22	y23	y30	y31	y32	y33	y40	y41	y42	y43	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
282	0	0	0	0	0	0	55	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	600	318	342	173	10

A célfüggvény értéke
55,44

Forrás: saját szerkesztés

10. ábra. Az optimalizálás eredménye



Forrás: saját szerkesztés

11. ábra. Az optimális útvonal egy tankolással

Az optimalizálás során kapott eredmények jelentősége

A Solver rövid futás után a feladathoz talált optimális (vagy optimálishoz közeli) megoldást. A kapott eredmény alapján egyszer, a 2. és 3. csomópontok között fogunk tankolni, és ott a 3. kútnál 55 liter üzemanyagot veszünk fel.

Anélkül, hogy részletesebb elemzést vagy érzékenységvizsgálatot végeznénk, a fenti példa alapján bemutatunk néhány eredményt, amelyet a bemeneti értékek változtatásával, illetve a cél módosításával kaptunk. A Solver eredményei azt mutatják, hogy ha a körjáratok tankolását és útvonalát a gyakorlatban csak ötletszerűen vagy tervezés nélkül választjuk ki, vagy teljesen a gépjárművezetőre bízzuk, akkor komoly veszteségek könyvelhetők el.

Amennyiben a lehető legrövidebb út alapján optimalizálnánk (megtartva a tankolási feltételeket), akkor az útvonal 1310 km-ről 1250 km-re csökkenne (95,4%-ra). Ugyanakkor a meghatározó költségek (itt a célfüggvényben szereplő „redukált" költséget vizsgálva) 34%-kal növekednek (55,44-ről 74,31 euróra). Ha a gépjárművezető a legrövidebb utat választja, akkor azzal lehet, hogy hamarabb ér célhoz, azonban komoly költségnövekedés lehet ennek a következménye.

Amennyiben a teljes költséget számolnánk, akkor egy 10%-os benzinárváltozás a mintafeladatunkban közel 5%-os változást jelent a teljes költséghez viszonyítva. Itt azért figyelembe kell venni, hogy a fuvar nagyon speciális. Egy jelentősebb benzinár-növekedéskor a tankolás költsége nagyobb arányban jelenik meg a fuvarozási költségek között (kis példánkban kb. 5%-kal növekedett), így ekkor különösen fontos a helyes benzinkútválasztás.

Ha a legdrágább megoldást keresnénk a fenti feltételek mellett (például csak autópályás tankolás, maximális mennyiséggel), akkor a teljes költségünk 62,33 euró lenne (12% növekedés, úgy, hogy csak két lehetőség volt a tankolásra), ami már jelentős különbség. Már a kis példánkban is jelentős eltérés van a szélsőértékek között. Ez is azt mutatja, hogy a tudatos benzinkútválasztás fontos kérdés a logisztikai költségek csökkentésében.

Összefoglalás

A cikk elsődleges célja egy pontos és megbízható matematikai modell és módszer kidolgozása az egyes áruszállítási feladatok teljesítéséhez szükséges optimális üzemanyag-felvételi helyek és mennyiségek meghatározására. A szakirodalom tanulmányozásakor nem találtunk olyan megoldásokat, amelyek ezt a problémát komplexen tudnák kezelni. Ez indokolta, hogy egy olyan modellt és módszert alkossunk, ami általánosan kezeli a problémát és általános megoldást is ad a problémára.

Első lépésként a fogalmak pontosítását, egyértelműsítését végeztük el. Ezzel megalkottuk azt a „szótárt”, amivel a modell megalkotása lehetővé vált. A következő lépésben kiválasztottuk azokat a lehetséges (ideális) kutakat, ahol érdemes tankolni. Erre azért lehet szükség, mert számtalan kút állhat rendelkezésre egy nagyobb (nemzetközi) körjárat során. Amennyiben kisebb járatokról van szó, akkor ez a lépés ki is hagyható. Megadtuk azt a módszert is, amellyel meghatározhatjuk az egyes csomópontok, kutat közti útvonalak hosszát a pontok GPS-koordinátái és a digitális térképadatok felhasználásával. A lehetséges tankolási pontok kiválasztása után a gyakorlatból megismert feltételek és korlátok figyelembevételével megalkottuk a probléma matematikai modelljét. A modellhez kapcsolódó optimalizálási feladat ebben a formában nagyon nehezen kezelhető, ezért célszerűnek látszott bizonyos feltételek átalakítása. Ez újabb változók bevezetését és a feltételek számának növekedését eredményezte, de a kapott modell már kezelhető, és ehhez már egyszerűbb szoftverek is biztosítanak megoldási lehetőséget. A modell alkalmazhatóságát egy egyszerű példán keresztül mutattuk be. Komolyabb feladat megoldására az általunk most bemutatott eszköz nem alkalmas, ráadásul a feladat eredményeinek a döntés-előkészítésbe történő bevonása is azt indokolja, hogy egy szoftvert dolgozzunk ki az adatok nyilvántartására, a változások követésére és az aktuális fuvarozási járatok optimális tankolási útvonalának meghatározására és a logisztikai döntéshozók számára információ juttatására.

A jövőbeli feladataink közé tartozik, hogy megvizsgáljuk a módszert vállalati körülmények között, és megmutassuk, hogy a mindennapi gyakorlatban is hatékonyan határozza meg a körjáratok útvonalát és tankolási tervét. További célunk, hogy a kidolgozott elméleti módszer alapján egy optimális üzemanyag-ellátást tervező szoftver is megvalósuljon.

Irodalomjegyzék

Anbuudayasankar, S. P.–Ganesh, K.–Mohapatra, S. 2014. *Models for Practical Routing Problems in Logistics. Design and Practices*. Cham, Switzerland: Springer.

Bazaraa, M. S. 2007. *Nonlinear programming Theory and algorithm.* Hoboken, New Jersey: John Wiley & Son Inc.

Birge, J. R.–Linetsky, V. 2008. *Handbooks in Operations Research and Management Science*. North Holland: Elsevier Science.

Bokor, Z. 2011. Improving Transport Costing by using Operation Modeling. *Transport* 26(2), 128–132.

Caramia, M.–Dell'Olmo, P. 2008. *Multi-objective management in freight logistics*. London: Springer.

Ehmke, J. F. 2012. *Integration of information and optimization models for routing in city logistics*. London: Springer.

Demetrovics, J.–Hua, H.–Gubán, Á. 2006. A formal representation for structured data. *Acta Polytechnica Hungarica* 13, 59–76.

Fraunhofer Institute. 2015. *Executive summary.* http://www.scs.fraunhofer.de/content/dam/scs/de/dokumente/studien/Top%20100%20EU%202015%20Executive%20Summary.pdf, letöltve: 2016.10.12.

Gilbert, J. C.–Nocedal, J. 1992. Global Convergence Properties of Conjugate Gradient Methods for Optimization. *Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM J. Optim* 2(1), 21–42.

Gubán, Á.–Gubán, M.–Hua, N. S. 2012. Információ, adat, intelligencia. In: Gubán, Á. (ed.) *Informatikai témák a gazdaságban I.* Budapest: Saldo Pénzügyi Tanácsadó és Informatikai Rt., 375–377.

Gubán, Á.–Kása, R. 2014. Conceptualization of fluid flows of logistificated processes. *Advanced Logistic Systems: Theory and Practice* 7(2), 24–27.

Gubán, M.–Gubán, Á. 2001. Egy fuvarozási vállalat szállítmányozási feladatának matematikai modellje és tervezett megoldási algoritmusa, In: Eszes, I. (ed.) *Globalitás és vállalkozás.* Budapest: Budapesti Gazdasági Főiskola, 226–235.

Gudehus, T.–Kotzab, H. 2009. *Comprehensive Logistics*. London: Springer.

Kovács, Gy. 2011. Emission reduction possibility by optimization of international road transport activity. In: *VII. International Scientific Conference Proceeding: The environment in the XXI century.* Santa Clara, Kuba: Universidad Central Marta Abreu de Las Villas, 1–5.

Kovács, Gy.–Cselényi, J. 2006. Utilization of historic data evaluation obtained from computer database during the organization of international transport activity. In: *Proceedings of 2nd Conference with International Participation Management of Manufacturing Systems*. Presov, Slovakia, 1–8.

Kovács, Gy.–Cselényi, J.–Schmidt, Sz.–Izsai, Á. 2007. Software conceptions relating to utilization of historic data evaluation of international transport activity and relating to cost calculation of transport loops, In: *Micro CAD Konferencia-kiadvány.* Miskolc: Miskolci Egyetem, 47–56.

Kovács, Gy.–Kot, S. 2016. New logistics and production trends as the effect of global economy changes. *Polish Journal of Management Studies* 14(2), 115–126.

Liu, S. L.–Papageorgiou, G. 2013. Multiobjective optimisation of production, distribution and capacity planning of global supply chains in the process industry. *Omega 41*, 369–382.

Narendra, K. S.–Parthasarathy, K. 2002. Gradient methods for the optimization of dynamical systems containing neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks* 2(2), 252–262.

Oláh, J.–Terjék, L.–Rónay-Tobel, B.–Pakurár, M.–Horváth, A. 2015. A logisztikai infrastrukturális fejlesztés biztonságmenedzsment kérdései intézményi oldalról. *Acta Oeconomica Universitatis Selye* 4(1), 126–134.

Ross, D. F. 2015. *Distribution Planning and Control*. London: Springer.

Rushton, A.–Croucher, P.–Baker, P. 2010. *The handbook of logistics & distribution management*. London: Kogan Page Limited.

Russell, S.–Norvig, P. 2005. *Mesterséges intelligencia modern meg-*

közelítésben. Budapest: Panem Kft.

Simchi-Levi, D.–Xin Chen, X–Bramel, J. 2014. *The Logic of Logistics, Theory, Algorithms, and Applications for Logistics Management. Third Edition*. London: Springer.

Stevens, G. C. 1989. Integrating the Supply Chain. *International Journal of Physical Distribution & Materials Management* 19(8), 3–8.

Vonderembse, M. A. 2006. Designing supply chains: Towards theory development. *International Journal of Production Economics* 100, 223–238.

Zhang, M.–Janic, M.–Tavasszy, L. A. 2015. A freight transport optimization model for integrated network, service, and policy design. *Transportation Research Part E* 77, 61–76.

Zhang, Y.–Roland, H. C.–Yap, R. H. C. 2001. *Making AC-3 an Optimal Algorithm Search, satisfiability and constraint satisfacion problems*. Singapore: School of Computing, National University of Singapore.

Zofío, J. L.–Condeço-Melhorado, A. M.–Maroto-Sánchez, A.–Gutiérrez, J. 2014. Generalized transport costs and index numbers: A geographical analysis of economic and infrastructure fundamentals. *Transportation Research Part A* 67, 141–157.

Melléklet – Jelölések

Az áttekinthetőség érdekében összefoglaltuk a használt jelöléseket.

Jelölés	**Jelentés**
Ismert adatok	
N	A felrakó- és lerakóhelyek száma, beleértve a kezdő és végső telephelypontot.
T_i	Az i-edik indulási hely és az $i+1$-edik végpont közti kutak halmaza.
τ_i	Az i-edik útszakaszon a kutak száma.
t_{ik}	A k-adik lehetséges útszakaszhoz tartozó kút az i-edik útszakaszon.
$H = \max_i \tau_i$	Egy útszakaszhoz tartozó kutak maximális száma.
ε_{ik}^{DL}	Az i, $i+1$ relációban a k-adik kútig tartó lehetséges útszakasz domborzati viszonyoktól függő tényezője.

ε_{ik}^{DM}	Az i, i+1 relációban a k-adik kúttól tartó lehetséges útszakasz domborzati viszonyoktól függő tényezője.
ε^{T}	A terheléstől függő korrekciós tényező.
$\mathbf{P} = [p_{ik}]_{N\times H+1}$	A t_{ik} kútnál az üzemanyag egységára.
$\mathbf{L} = [l_{ik}]_{N\times H+1}$	Az i-edik indulási helytől az i+1-edik végpont között a k-adik kútig tartó útvonalának hossza.
$\mathbf{M} = [m_{ik}]_{N\times H+1}$	Az i-edik indulási helytől az i+1-edik végpont között a k-adik kúttól a végpontig tartó útvonalának hossza.
$\mathbf{S} = [s_{ik}]_{N\times H+1}$	Az i-edik útszakasz hossza.
q_i	Az i, i+1 relációban szállítandó mennyiség.
$f_ü$	A fajlagos fogyasztás.
Q_{max}	Az üzemanyagtank mérete.
Q_{ind}	A járat indulási üzemanyagszintje.
Q_B	Biztonsági üzemanyagszint.
Q_Z	A célállomásba érkezéskor szükséges minimális üzemanyagszint.
Ismeretlenek	
x_{ik}	Az i. útszakasz k. lehetséges útszakaszán tankolt mennyiség.
$sgn(x_{ik})$	Az i. útszakasz a k. kútnál tankoltunk vagy sem.
$\mathbf{Q} = [Q_i]_N$	Az i. csomópontnál rendelkezésre álló üzemanyag-mennyiség.